



TITLE:

反復解の成分毎事後誤差評価 (数値計算のアルゴリズムの研究)

AUTHOR(S):

山本, 哲朗

CITATION:

山本, 哲朗. 反復解の成分毎事後誤差評価 (数値計算のアルゴリズムの研究). 数理解析研究所講究録 1977, 310: 19-31

ISSUE DATE:

1977-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103888>

RIGHT:

反復解の成分毎事後誤差評価

愛媛大 理 山本 哲朗

§1. 序

\mathcal{R}^n における非線形方程式

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^t = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^t \quad (1)$$

を解く一般 Newton 反復

$$x^{(v+1)} = x^{(v)} - A(x^{(v)})f(x^{(v)}), \quad v \geq 0 \quad (A(x): n \times n \text{ 行列}) \quad (2)$$

を考える. 以下この反復は well-defined, すなわち, f の定義域に含まれる閉凸領域 \mathcal{Q} を適当にとり, $x^{(v)} \in \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}^n$ とする.

次の記号と定義をおく.

$B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ ($\overline{\mathcal{R}^n}$ の長方形行列) とするとき

$$B \geq C \sim C \leq B \Leftrightarrow b_{ij} \geq c_{ij} \quad (\forall i, j)$$

$$B > C \sim C < B \Leftrightarrow b_{ij} > c_{ij} \quad (\forall i, j)$$

$$B \not\geq C \sim C \not\leq B \Leftrightarrow B \geq C \text{ \& } B \neq C$$

$$B \geq 0 \sim 0 \leq B \Leftrightarrow b_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j)$$

$$\rho(B) = (\|b_{ij}\|)$$

B : 正方形行列 のとき $\rho(B) = B$ のスペクトル半径

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|B\| = \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$$

$$U(u, d) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(x-u) < d\} \quad (u, d \in \mathbb{R}^n)$$

$$\bar{U}(u, d) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(x-u) \leq d\}$$

$$S(u, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-u\| < r\} \quad (u \in \mathbb{R}^n, 0 < r \in \mathbb{R})$$

$$\bar{S}(u, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-u\| \leq r\}$$

$$K(x) = I - A(x)J(x), \quad K^{(\nu)} = K(x^{(\nu)}), \quad \rho(K^{(\nu)}) < 1, \quad A^{(\nu)} = \alpha(A(x^{(\nu)}))$$

$$\varepsilon^{(\nu)} = \alpha(A(x^{(\nu)})f(x^{(\nu)})) = \alpha(x^{(\nu)} - x^{(\nu+1)})$$

$$e^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1} \varepsilon^{(\nu)} = (I + K^{(\nu)} + K^{(\nu)^2} + \dots) \varepsilon^{(\nu)}$$

$$\bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|) \subseteq \mathcal{D}$$

$$\max_{j,k} \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq \begin{cases} m_i^{(\nu)} & (x \in \bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|)) \\ m_i & (x \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

$$m^{(\nu)} = \begin{pmatrix} m_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ m_n^{(\nu)} \end{pmatrix} \geq 0, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \geq 0$$

$$M^{(\nu)} = m^{(\nu)}(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} m_1^{(\nu)} & \dots & m_1^{(\nu)} \\ \vdots & & \vdots \\ m_n^{(\nu)} & \dots & m_n^{(\nu)} \end{pmatrix}, \quad M = m(1, \dots, 1)$$

$$p^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1} A^{(\nu)} m^{(\nu)}, \quad g^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1} A^{(\nu)} m$$

本講の目的は、最近占部[2],[3]により論じられた反復解の成分毎誤差評価法を幾分改良し、実計算において容易に適用可能な形に定式化することである。ただし f についての仮定は又々強く、 C^2 級 (\mathcal{D} において) とする。計算例も併せて掲げ、その有効性を示す。

§2. 主結果

次のことが成り立つ。以下 ν は固定する。

定理 1. $\|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|p^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\| < 1$

$$\alpha^{(\nu)} = e^{(\nu)} + \frac{\|e^{(\nu)}\|^2}{1 - \|p^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\| + \sqrt{1 - 2\|p^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\|}} p^{(\nu)}$$

$$\bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \subseteq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x^* \in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$$

系. 定理 1 の仮定の下で

$$\alpha(x^{(\nu)} - x^*) \leq \alpha^{(\nu)}$$

$$\alpha(x^{(\nu+1)} - x^*) \leq \alpha^{(\nu)} - \varepsilon^{(\nu)}$$

$$= K^{(\nu)} e^{(\nu)} + \frac{\|e^{(\nu)}\|^2}{1 - \|p^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\| + \sqrt{1 - 2\|p^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\|}} p^{(\nu)}$$

定理 2. $\|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|g^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\| < 1$

$$r_\nu = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\|g^{(\nu)}\|\|e^{(\nu)}\|}}{\|g^{(\nu)}\|}$$

$$S(x^{(\nu)}, r_\nu) \subseteq \emptyset$$

\Rightarrow 解 x^* は $S(x^{(\nu)}, r_\nu)$ において一意である。

§3 補題

上の定理を証明するために、いくつかの補題を述べる。

補題 1. u, v はベクトルで $u \neq 0, v \geq 0, \|u\|\|v\| < 1$ とする。

このとき、ベクトル方程式 $\|x\|^2 u - 2x + v = 0$ は $0 \neq \alpha \neq \beta$ なる解 α, β をもつ。しかも $\|\alpha\|, \|\beta\|$ はスカラー 2 次方程式

式 $\|u\|^2 t^2 - 2t + \|v\| = 0$ の 2 根である.

証明. 直接計算.

$$\alpha = \frac{1}{2}v + \frac{1}{\|u\|} \left\{ 1 - \frac{\|u\| \cdot \|v\|}{2} - \sqrt{1 - \|u\| \cdot \|v\|} \right\} u$$

$$\beta = \frac{1}{2}v + \frac{1}{\|u\|} \left\{ 1 - \frac{\|u\| \cdot \|v\|}{2} + \sqrt{1 - \|u\| \cdot \|v\|} \right\} u.$$

定義. この補題にいう α を最小解, β を最大解という.

注意. この定義に於ては, 定理 1 の $\alpha^{(v)}$ は

$$\|x\|^2 p^{(v)} - 2x + 2e^{(v)} = 0$$

の最小解, 定理 2 の r_v は

$$\|x\|^2 q^{(v)} - 2x + 2e^{(v)} = 0$$

の最大解を $\hat{\beta}^{(v)}$ とするとき, $r_v = \|\hat{\beta}^{(v)}\|$.

補題 2. $u \neq 0, v \geq 0$ とする.

(i) ある $x \geq 0$ につき $\|x\|^2 u - 2x + v \leq 0 \Rightarrow \|u\| \cdot \|v\| < 1$

$$\alpha \leq x \text{ かつ } \|x\| < \|\beta\|$$

特に $u > 0 \Rightarrow \alpha < x$

(ii) $\|u\| \cdot \|v\| < 1$ かつ ある $y \geq 0$ につき $\|y\|^2 u - 2y + v \geq 0$

$$\Rightarrow y \leq \alpha \text{ or } \|y\| \geq \|\beta\|$$

証明. (i) $\|x\|^2 u + v \leq 2x$ より $\|x\|^2 \|u\| + \|v\| < 2\|x\|$

$$\therefore \|u\| \cdot \|v\| < 1, \quad \alpha \leq \|x\| < \|\beta\|$$

$$\text{また } 0 \leq \|x\|^2 u - 2x + v = \|x\|^2 u - 2x + (2\alpha - \|u\|^2 u)$$

$$= (\|x\|^2 - \|u\|^2)u - 2(x - \alpha)$$

$$\therefore x - \alpha \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|u\|^2)u \quad \therefore x - \alpha \begin{cases} \geq 0 \\ > 0 \text{ (if } u > 0) \end{cases}$$

(ii) 同様.

補題3. $\|p^{(v)}\| > 0$

証明. $\rho(K(x^{(v)})) \leq \rho(K^{(v)}) < 1$ より $A(x^{(v)})J(x^{(v)}) = I - K(x^{(v)})$

は正則. よって $A(x^{(v)})$, $J(x^{(v)})$ は正則である.

$m^{(v)} \neq 0$ より $m_j^{(v)} > 0$ なる j があるが, $A(x^{(v)})$ の j 列は 0 ではない. したがって j 成分 $\neq 0$ と可成は, $\alpha(A(x^{(v)}))m^{(v)}$ の j 成分 > 0 . よって

$$p^{(v)} = (I + K^{(v)} + K^{(v)^2} + \dots) A^{(v)} m^{(v)} \geq A^{(v)} m^{(v)} \neq 0.$$

補題4. $\alpha^{(v)}, \beta^{(v)} : \|x\|^2 p^{(v)} - 2x + 2e^{(v)} = 0$ の最小, 最大解

$\hat{\alpha}^{(v)}, \hat{\beta}^{(v)} : \|x\|^2 g^{(v)} - 2x + 2e^{(v)} = 0$ の最小, 最大解

とする.

$$(i) \quad 2\|p^{(v)}\|\|e^{(v)}\| < 1 \Rightarrow \|\alpha^{(v)}\| < 2\|e^{(v)}\|$$

$$(ii) \quad 2\|g^{(v)}\|\|e^{(v)}\| < 1 \Rightarrow \alpha^{(v)} \leq \hat{\alpha}^{(v)}, \|\hat{\alpha}^{(v)}\| < 2\|e^{(v)}\| < \|\hat{\beta}^{(v)}\| \leq \|\beta^{(v)}\|$$

証明 (i) $\|\alpha^{(v)}\|$ は $\varphi(t) = \|p^{(v)}\|t^2 - 2t + 2\|e^{(v)}\| = 0$ の最小根

$$\text{かつ } \varphi(2\|e^{(v)}\|) = (2\|e^{(v)}\|\|p^{(v)}\| - 1) 2\|e^{(v)}\| < 0$$

$$\therefore \|\alpha^{(v)}\| < 2\|e^{(v)}\| < \|\beta^{(v)}\|.$$

$$(ii) \quad p^{(v)} \leq g^{(v)} \text{ より}$$

$$\|\hat{\alpha}^{(v)}\|^2 p^{(v)} - 2\hat{\alpha}^{(v)} + 2e^{(v)} \leq \|\hat{\alpha}^{(v)}\|^2 g^{(v)} - 2\hat{\alpha}^{(v)} + 2e^{(v)} = 0$$

$$\therefore \alpha^{(v)} \leq \hat{\alpha}^{(v)} \quad (\text{補題2より})$$

$$\text{また } 2\|e^{(v)}\|^2 \|g^{(v)}\| - 2(2\|e^{(v)}\|) + 2\|e^{(v)}\| = 2\|e^{(v)}\| (2\|e^{(v)}\|\|g^{(v)}\| - 1) < 0$$

$$\therefore \|\hat{\alpha}^{(v)}\| < 2\|e^{(v)}\| < \|\hat{\beta}^{(v)}\| = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\|g^{(v)}\|\|e^{(v)}\|}}{\|g^{(v)}\|} \leq \|\beta^{(v)}\|$$

補題 5. $\Omega: \mathbb{R}^n$ の閉領域, $g: \Omega \rightarrow \Omega$

$$\alpha(g(x) - g(y)) \leq L \alpha(x - y) \quad (x, y \in \Omega)$$

$$L \geq 0: n \times n \text{ 行列}, \rho(L) < 1$$

$$\Rightarrow \exists! x^* \in \Omega; \quad g(x^*) = x^*$$

証明. 縮小写像の原理の証明と同じ. 本質的に局部に負う.

補題 6. $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right) (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ の双線形写像})$ が \mathcal{D} に

おいて存在しかつ連続ならば, $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\alpha(f'(x)y) \leq \begin{cases} \|y\| M^{(n)} & (x \in \bar{S}(x^{(n)}, 2\|e^{(n)}\|)) \\ \|y\| M & (x \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

$$\alpha(f''(x)y \cdot z) \leq \begin{cases} \|y\| M^{(n)} \alpha(z) = \|y\| \cdot \|z\| m^{(n)} & (x \in \bar{S}(x^{(n)}, 2\|e^{(n)}\|)) \\ \|y\| M \alpha(z) = \|y\| \cdot \|z\| m & (x \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

証明 殆んど自明

§4. 定理1の証明

$$g(x) = x - A(x^{(n)})f(x), \quad L^{(n)} = K^{(n)} + \|\alpha^{(n)}\| \cdot A^{(n)} M^{(n)}$$

とおくとき, 次のことが成り立つ.

$$(i) \quad x, y \in \bar{O}(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \Rightarrow \alpha(g(x) - g(y)) \leq L^{(n)} \alpha(x - y)$$

$$(ii) \quad \rho(L^{(n)}) < 1$$

$$(iii) \quad x \in \bar{O}(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \in \mathcal{D} \Rightarrow g(x) \in \bar{O}(x^{(n)}, \alpha^{(n)})$$

実際, $x, y \in \bar{O}(x^{(n)}, \alpha^{(n)})$ ならば

$$(i) \quad g(x) - g(y) = x - y - A(x^{(n)})(f(x) - f(y))$$

$$\begin{aligned}
&= x - y - A(x^{(n)}) \int_0^1 f'(u)(x-y) dt \quad u = y + t(x-y) \in \bar{U}(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \\
&= x - y - A(x^{(n)}) \int_0^1 \{ f'(x^{(n)}) + \int_0^1 f''(v)(u-x^{(n)}) d\theta \} (x-y) dt \\
&\quad \left(\begin{array}{l} v = x^{(n)} + \theta(u-x^{(n)}) \in \bar{U}(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \\ \subset S(x^{(n)}, 2\|e^{(n)}\|) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$= [I - A(x^{(n)})J(x^{(n)})](x-y) - A(x^{(n)}) \int_0^1 \int_0^1 f''(v)(u-x^{(n)})(x-y) d\theta dt$$

$$\begin{aligned}
\therefore \alpha(g(x) - g(y)) &\leq K^{(n)} \alpha(x-y) + A^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \|u-x^{(n)}\| \cdot M^{(n)} \alpha(x-y) d\theta dt \\
&\leq L^{(n)} \alpha(x-y), \quad L^{(n)} = K^{(n)} + \frac{\| \alpha^{(n)} \|}{\sqrt{A^{(n)}}} M^{(n)} \quad \because \|u-x^{(n)}\| \leq \| \alpha^{(n)} \| \\
&\quad \leq 2\|e^{(n)}\|
\end{aligned}$$

$$(ii) \|L^{(n)}\| \leq \|K^{(n)}\| + \| \alpha^{(n)} \| \cdot \|A^{(n)} M^{(n)}\| = \|K^{(n)}\| + \| \alpha^{(n)} \| \cdot \|A^{(n)} m^{(n)}\|$$

$$= \|K^{(n)}\| + \frac{1 - \sqrt{1 - 2\|p^{(n)}\| \cdot \|e^{(n)}\|}}{\|p^{(n)}\|} \|A^{(n)} m^{(n)}\|$$

$$\leq \|K^{(n)}\| + (1 - \sqrt{1 - 2\|p^{(n)}\| \cdot \|e^{(n)}\|}) < 1$$

$$\therefore \rho(L^{(n)}) < 1 \quad \left(\because \|K^{(n)}\|^2 + 2\|p^{(n)}\| \cdot \|e^{(n)}\| < 1 \right)$$

$$(iii) x \in \bar{U}(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \text{ のとき } f(x) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x-x^{(n)}) + R(x, x^{(n)})$$

$$\text{ただし } R(x, x^{(n)}) = \int_0^1 (1-t) f''(x^{(n)} + t(x-x^{(n)}))(x-x^{(n)})^2 dt$$

$$\therefore g(x) - x^{(n)} = x - x^{(n)} - A(x^{(n)}) [f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x-x^{(n)}) + R(x, x^{(n)})]$$

$$= K(x^{(n)})(x-x^{(n)}) + (x^{(n+1)} - x^{(n)}) - A(x^{(n)}) R(x, x^{(n)})$$

$$\alpha(g(x) - x^{(n)}) \leq K^{(n)} \alpha(x-x^{(n)}) + \varepsilon^{(n)} + A^{(n)} \cdot \frac{1}{2} \|x-x^{(n)}\|^2 m^{(n)}$$

$$\leq K^{(n)} \alpha^{(n)} + \varepsilon^{(n)} + \frac{1}{2} \| \alpha^{(n)} \|^2 A^{(n)} m^{(n)} = \alpha^{(n)}$$

$$\therefore g(x) \in \bar{U}(x^{(n)}, \alpha^{(n)})$$

以上 (i), (ii), (iii) に よって, 補題5 が $\Omega = \bar{U}(x^{(n)}, \alpha^{(n)})$ に対して適用できる。

さらにこの定理の系を述べたために

$$0 = f(x^*) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^* - x^{(n)}) + R(x^*, x^{(n)})$$

に注意して

$$\begin{aligned}
 x^{(v+1)} - x^* &= x^{(v)} - x^* - A(x^{(v)})f(x^{(v)}) \\
 &= x^{(v)} - x^* - A(x^{(v)})[f'(x^{(v)})(x^{(v)} - x^*) - \mathcal{R}(x^*, x^{(v)})] \\
 &= K(x^{(v)})(x^{(v)} - x^*) + A(x^{(v)})\mathcal{R}(x^*, x^{(v)}) \\
 \therefore \phi(x^{(v+1)} - x^*) &\leq K^{(v)}\phi(x^{(v)} - x^*) + A^{(v)}\phi(\mathcal{R}(x^*, x^{(v)})) \quad (3) \\
 &= K^{(v)}\phi(x^{(v)} - x^*) + \frac{1}{2}\|x^{(v)} - x^*\|^2 A^{(v)}m^{(v)} \\
 &= K^{(v)}\alpha^{(v)} + \frac{1}{2}\|\alpha^{(v)}\|^2 A^{(v)}m^{(v)} \\
 &= \alpha^{(v)} - \varepsilon^{(v)} \\
 &= K^{(v)}e^{(v)} + \frac{\|e^{(v)}\|^2}{1 - \|p^{(v)}\|\|e^{(v)}\| + \sqrt{1 - 2\|p^{(v)}\|\|e^{(v)}\|}} p^{(v)}
 \end{aligned}$$

§5 定理2の証明

$\hat{x} \in D$ において, 此の解 $(\hat{x} \neq x^*, \hat{x} \in D)$ とする.

$$\begin{aligned}
 \phi(x^{(v)} - \hat{x}) &\leq \phi(x^{(v)} - x^{(v+1)}) + \phi(x^{(v+1)} - \hat{x}) \\
 &\leq \varepsilon^{(v)} + K^{(v)}\phi(x^{(v)} - \hat{x}) + A^{(v)}\phi(\mathcal{R}(\hat{x}, x^{(v)})) \quad ((3) \text{ に依る}) \\
 &\leq \varepsilon^{(v)} + K^{(v)}\phi(x^{(v)} - \hat{x}) + \frac{1}{2}\|x^{(v)} - \hat{x}\|^2 A^{(v)}m \\
 \therefore \|x^{(v)} - \hat{x}\|^2 A^{(v)}m - 2(1 - K^{(v)})\phi(x^{(v)} - \hat{x}) + 2\varepsilon^{(v)} &\geq 0 \\
 \|x^{(v)} - \hat{x}\|^2 \beta^{(v)} - 2\phi(x^{(v)} - \hat{x}) + 2e^{(v)} &\geq 0 \\
 \therefore \phi(x^{(v)} - \hat{x}) &\leq \hat{\alpha}^{(v)} \quad \text{or} \quad \|x^{(v)} - \hat{x}\| \geq \|\hat{\beta}^{(v)}\| \quad (4)
 \end{aligned}$$

こゝに $\hat{\alpha}^{(v)}, \hat{\beta}^{(v)}$ は $\|x\|^2 \beta^{(v)} - 2x + 2e^{(v)} = 0$ の最小, 最大解

前節 (1) の証明と同様に

$$x^* \in \overline{\sigma}(x^{(v)}, \alpha^{(v)}) \subset \overline{\sigma}(x^{(v)}, \hat{\alpha}^{(v)}) \quad (\text{補題4(ii)に依る})$$

であることに注意して

$$\begin{aligned}
 \hat{x} \in \bar{U}(x^{(n)}, \hat{\alpha}^{(n)}) &\stackrel{CD}{\Rightarrow} \phi(\hat{x} - x^*) = \phi(g(\hat{x}) - g(x^*)) \\
 &\leq (K^{(n)} + \|\hat{\alpha}^{(n)}\| A^{(n)} M) \phi(\hat{x} - x^*) \\
 &= \hat{L}^{(n)} \phi(\hat{x} - x^*), \quad \hat{L}^{(n)} = K^{(n)} + \|\hat{\alpha}^{(n)}\| A^{(n)} M \\
 \|\hat{L}^{(n)}\| &\leq \|K^{(n)}\| + \frac{1 + \sqrt{1 - 2\|g^{(n)}\| \cdot \|e^{(n)}\|}}{\|g^{(n)}\|} \|A^{(n)} m\| < 1 \\
 &\quad (\Leftrightarrow \|K^{(n)}\|^2 + 2\|g^{(n)}\| \|e^{(n)}\| < 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \|\hat{x} - x^*\| \leq \|\hat{L}^{(n)}\| \|\hat{x} - x^*\| < \|\hat{x} - x^*\| \quad \text{これは矛盾}$$

$$\text{結局 (4) より } \|x^{(n)} - \hat{x}\| \geq \|\hat{\beta}^{(n)}\| = r_n$$

すなわち 解 x^* は $S(x^{(n)}, r_n)$ を一意的

§6 諸注意

注意1. $\rho(K^{(n)}) < 1 \Rightarrow J(x^{(n)})$ は正則) しかし $J(x^*)$ の正則性は不明である. ゆえに x^* は単純とは限らない. (ただし, 重根の場合には, 定理の仮定 $\|K^{(n)}\|^2 + 2\|p^{(n)}\| \cdot \|e^{(n)}\| < 1$ 等が満たされない場合がある.)

注意2. 定理1の系における評価の $\phi(x^{(n+1)} - x^*) \leq \alpha^{(n)} - \varepsilon^{(n)}$ は a priori の性格をもつ. ($\phi(x^{(n+1)} - x^*) \leq \alpha^{(n+1)}$ の方が一般に sharp)

注意3. 定理1の存在領域は次に述べる意味で最良のものがある. すなわち, 任意の $\delta \geq 0$ に対し

$$x^* \in \bar{U}(x^{(n)}, \delta) \subset \bar{U}(x^{(n)}, 2\varepsilon^{(n)})$$

と書ける

$$\Lambda^{(n)} = K^{(n)} + \frac{1}{2} \|\delta\| A^{(n)} M^{(n)}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} \alpha(x^{(n)} - x^*) &\leq \alpha(x^{(n)} - x^{(n+1)}) + \alpha(x^{(n+1)} - x^*) \\ &\leq \varepsilon^{(n)} + K^{(n)} \alpha(x^{(n)} - x^*) + \frac{1}{2} \|x^{(n)} - x^*\|^2 A^{(n)} m^{(n)} \\ &\leq \varepsilon^{(n)} + (K^{(n)} + \frac{1}{2} \|x^{(n)} - x^*\| A^{(n)} m^{(n)}) \alpha(x^{(n)} - x^*) \\ &\leq \varepsilon^{(n)} + \Lambda^{(n)} \alpha(x^{(n)} - x^*) \end{aligned}$$

$$\therefore (I - \Lambda^{(n)}) \alpha(x^{(n)} - x^*) \leq \varepsilon^{(n)}$$

ここで $\rho(\Lambda^{(n)}) < 1$ と仮定すれば $\alpha(x^{(n)} - x^*) \leq (I - \Lambda^{(n)})^{-1} \varepsilon^{(n)} \equiv \delta^{(n)}$

この評価が $x^* \in \overline{O}(x^{(n)}, \delta)$ なる評価を改良するためには $\delta^{(n)} \leq \delta$ であるべきであろう。しかし $m^{(n)} \neq 0$, $\varepsilon^{(n)} \neq 0$, $\delta^{(n)} \leq \delta$ ならば $\alpha(x^{(n)} - x^*) \leq \alpha^{(n)} \leq \delta^{(n)}$ が成り立つ。

$$\because \|\delta^{(n)}\| \leq \|\delta\|, \quad \varepsilon^{(n)} = (I - \Lambda^{(n)}) \delta^{(n)} \quad \delta^{(n)}$$

$$\begin{aligned} &\|\delta^{(n)}\|^2 p^{(n)} - 2\delta^{(n)} + 2\varepsilon^{(n)} \\ &= (I - K^{(n)})^{-1} [\|\delta^{(n)}\| A^{(n)} M^{(n)} - 2(\Lambda^{(n)} - K^{(n)})] \delta^{(n)} \\ &= (\|\delta^{(n)}\| - \|\delta\|) (I - K^{(n)})^{-1} A^{(n)} M^{(n)} \delta^{(n)} \\ &= (\|\delta^{(n)}\| - \|\delta\|) \|\delta^{(n)}\| p^{(n)} \neq 0 \quad (\because p^{(n)} \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{よって 補題 2 (i) により } \alpha^{(n)} \leq \delta^{(n)}$$

注意 4. 1. ルミ評価への応用

$$\xi^{(n)} = \alpha(x^{(n)} - x^*), \quad \kappa_n = \|K^{(n)}\|, \quad c_n = \|A^{(n)} m^{(n)}\| \quad \text{と置く}$$

$$\varepsilon^{(n)} \leq \alpha(x^{(n)} - x^*) + \alpha(x^{(n+1)} - x^*)$$

$$\leq \xi^{(v)} + \kappa^{(v)} \xi^{(v)} + \frac{1}{2} \|\xi^{(v)}\|^2 A^{(v)} m^{(v)}$$

$$\therefore \|E^{(v)}\| \leq \|\xi^{(v)}\| + \|\kappa^{(v)}\| \|\xi^{(v)}\| + \frac{1}{2} \|\xi^{(v)}\|^2 \|A^{(v)} m^{(v)}\|$$

$$\therefore C_v \|\xi^{(v)}\|^2 + 2(1 + \kappa_v) \|\xi^{(v)}\| - 2\|E^{(v)}\| \geq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \|\xi^{(v)}\| &\geq \frac{-(1 + \kappa_v) + \sqrt{(1 + \kappa_v)^2 + 2C_v \|E^{(v)}\|}}{C_v} \\ &= \frac{2\|E^{(v)}\|}{1 + \kappa_v + \sqrt{(1 + \kappa_v)^2 + 2C_v \|E^{(v)}\|}} \end{aligned}$$

よって定理1と併せて

$$\kappa_v^2 + 2\|p^{(v)}\| \|e^{(v)}\| < 1, \quad \bar{U}(x^{(v)}, \alpha^{(v)}) \subset \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \exists x^* \in \bar{U}(x^{(v)}, \alpha^{(v)}) \quad \text{かつ}$$

$$\frac{2\|E^{(v)}\|}{1 + \kappa_v + \sqrt{(1 + \kappa_v)^2 + 2C_v \|E^{(v)}\|}} \leq \|x^{(v)} - x^*\| \leq \frac{2\|e^{(v)}\|}{1 + \sqrt{1 - 2\|p^{(v)}\| \|e^{(v)}\|}}$$

同様な手法はノルム空間における高次反復法にも適用できる。

§7 数値例

次の簡単な方程式に Newton 法を適用してみる。

$$\begin{cases} f_1(x) \equiv \sum_{i=1}^3 x_i^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \\ f_2(x) \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 - (a + b + 2c) = 0 \quad (a, b, c: \text{定数}) \\ f_3(x) \equiv x_1 x_2 + x_3 - ab - c = 0 \end{cases}$$

明らかに (a, b, c) と (b, a, c) は解である。

この場合 $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$ かつ $m^{(v)} = m = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。丸め誤差をさけるため、4倍精度 (FACOM 230-75) で計算した。結果の一

部を下表に示す。表中の***印は、定理の仮定がみたされ

なかった($2\|p^{(n)}\|\|e^{(n)}\|\geq 1$, $p^{(n)}=g^{(n)}=A^{(n)}m$, $e^{(n)}=\varepsilon^{(n)}$)ことを示す。したがって、この場合誤差評価はできない。

表1 (a,b,c)=(3.5, 1.23, -17.8)

n	$x^{(n)}$	$\alpha^{(n)}$	r_n
0	0.100000000000000000000000000000+01 0.000000000000000000000000000000+00 0.000000000000000000000000000000+00	***	***
1	0.165801450000000000000000000000+03 0.169681450000000000000000000000+03 -0.183176450000000000000000000000+03	***	***
2	0.221125895329362771269882227041+03 -0.561097870361531687680720072325+02 -0.979430541466048012509051099040+02	***	***
3	0.108366706227187732925864805978+03 -0.284226415236407801834043220031+02 -0.554070323517734763712302419875+02	***	***
⋮			
8	0.445907864061815235185093187440+01 0.278852379328046671979708235526+00 -0.178039655099730995119153200550+02	***	***
9	0.371822675500500877775510268957+01 0.101177623688474333596738802466+01 -0.178000014959448760568612453571+02	0.24781+00 0.24781+00 0.97261-02	0.19+01
10	0.351759583756368505901339564003+01 0.121240416243674103589040982263+01 -0.1780000000000002130474519027313+02	0.17735-01 0.17735-01 0.48041-04	0.20+01
11	0.350013431139063220963099256477+01 0.122986568860936779036900744387+01 -0.178000000000000000000000000043+02	0.13432-03 0.13432-03 0.27482-08	0.20+01
12	0.350000000794599787555451823709+01 0.122999999205400212444548176291+01 -0.178000000000000000000000000000+02	0.79460-08 0.79460-08 0.96175-17	0.20+01
13	0.3500000000000000002781448537281+01 0.12299999999999997218551462719+01 -0.178000000000000000000000000000+02	0.27814-16 0.27814-16 0.11786-33	0.20+01

上の表は、初期値をできるだけえらんべ例である。解の成分のオーダーがかなり異なり、初期値をかなり近くにえらんべ例を表2に示す。

表2

$$(a,b,c) = (0.35+06, 0.123-02, -0.178+02)$$

ν	$x^{(n)}$	$\alpha^{(n)}$	r_n
0	0.40000000000000000000000000000000+06	0.51932+05	0.20+06
	0.10000000000000000000000000000000-02	0.50574+04	
	-0.20000000000000000000000000000000+02	0.66175+04	
1	0.353124921882906177865543170016+06	0.31397+04	0.23+06
	0.509959488591906428609546221421-02	0.32053+02	
	-0.158026287625053189230372805570+04	0.15858+04	
2	0.350017244854107071454919363226+06	0.17245+02	0.23+06
	0.128841189604142665772561916619-02	0.10144-02	
	-0.264224562594837481730104758551+02	0.86231+01	
3	0.350000000530999143887247488679+06	0.53100-03	0.23+06
	0.123000363445483790188443521285-02	0.36354-08	
	-0.178002655013891710426952817172+02	0.26550-03	
4	0.350000000000000000503488736564+06	0.50349-12	0.23+06
	0.123000000000000623148741475402-02	0.62315-17	
	-0.178000000000002517474840259381+02	0.25175-12	

- [1] Ostrowski, A.M.: Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces, Academic Press 1973
- [2] Urabe, M.: Component-wise error analysis of iterative methods practiced on a floating-point system, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser.A, Math.27(1973) 23-64
- [3] Urabe, M.: A posteriori component-wise error estimation of approximate solutions to nonlinear equations, Lect. Notes in Computer Sci. 29, Springer 1975, 99-117